Übungsstunde 6:

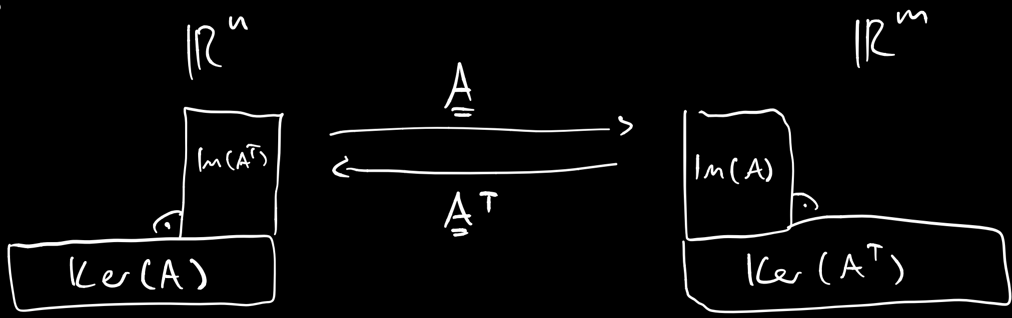
Themen:

- Nachbesprechung Theorie 5 / Serie 4
- Koordinaten in einer bestimmten Basis
- Koordinatentransformation & Basiswechsel
- Lineare Abbildungen

Korrektur Theorie 5:

Eigenschaften zum Kern & Bild linearer Abbildungen:
(vi) war falsch $\Rightarrow$ streicht das in euren Notizen

Richtig:



(v) $\dim(Ker(A)) + \dim(Im(A)) = n$

Was zusätzlich gilt, siehe Zeichnung: $\dim(Ker(A)) + \dim(Im(A^T)) = n$

$\Rightarrow$ (vi) $\dim(Im(A)) = \dim(Im(A^T))$!

Feedback Serie 4:

- HM wurde gut gelöst
- GR: Koeff.vgl. ausprobieren

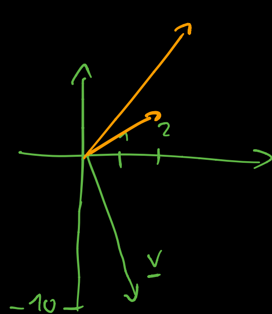
  $\hookrightarrow$ $Q_{21} = G \Rightarrow Q = G^T = Q_{21}^T$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Koordinaten in einer bestimmten Basis:

$$\underline{x} = x_1 \underline{b}^{(1)} + x_2 \underline{b}^{(2)} + \dots + x_n \underline{b}^{(n)}$$

Bsp: $B = [b_1 \; b_2] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix}$, $[\underline{v}]_B$



$$\begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -10 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3.5 & -11 \end{array}\right] \Rightarrow x_2 = -\frac{22}{7}, \quad x_1 = \frac{40}{7}$$

$$\Rightarrow [\underline{v}]_B = \begin{bmatrix} \frac{40}{7} \\ -\frac{22}{7} \end{bmatrix}$$

Bsp: $U := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}$

$$x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \iff \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_4 = t$
$x_3 = s$
$x_1 = u$
$x_2 = 2s - t$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} u \\ 2s-t \\ s \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; u,s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; u,s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Frage: $B = \{b^{(1)} = 1,\ b^{(2)} = x-2,\ b^{(3)} = x^2\}$, $p(x) = 7x^2 - 4x + 4$

$$\Rightarrow [p(x)]_B = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{bmatrix} 1 \\ x-2 \\ x^2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow p(x) = -4(1) - 4(x-2) + 7(x^2)$$
$$= -4 - 4x + 8 + 7x^2 = 7x^2 - 4x + 4$$

Koordinatentransformation & Basiswechsel:

Wollen den Vektor $\underline{v}$, dessen Darstellung wir in einer Basis $\tilde{B}$ kennen, in eine neue Basis B transformieren.

$$[\underline{v}]_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\underline{T}]{\text{wollen}} [\underline{v}]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wollen Übergangsmatrix $\underline{T}$ bestimmen:

$$[\underline{v}]_{\tilde{B}} = \tilde{v}_1 \underline{\tilde{b}}^{(1)} + \tilde{v}_2 \underline{\tilde{b}}^{(2)} + \dots + \tilde{v}_n \underline{\tilde{b}}^{(n)}$$

$$\Rightarrow = \tilde{v}_1 \left(a_1 \underline{b}^{(1)} + a_2 \underline{b}^{(2)} + \dots + a_n \underline{b}^{(n)}\right) + \tilde{v}_2 \left(c_1 \underline{b}^{(1)} + c_2 \underline{b}^{(2)} + \dots + c_n \underline{b}^{(n)}\right) + \dots$$

Beispiel 6.4: $\tilde{B} = \{ \underbrace{3t}_{\tilde{b}^{(1)}}, \underbrace{2t^3+2}_{\tilde{b}^{(2)}}, \underbrace{t+1}_{\tilde{b}^{(3)}} \} \xrightarrow{T} B = \{1, t, t^3\}$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}^{(1)} &= 3t = \boxed{0 \cdot b^{(1)} + 3\, b^{(2)} + 0\, b^{(3)}} \\
\tilde{b}^{(2)} &= 2t^3 + 2 = \boxed{2 \cdot (1) + 0 \cdot (t) + 2 \cdot (t^3)} \\
\tilde{b}^{(3)} &= t + 1 = \boxed{1 \cdot (1) + 1 \cdot (t) + 0 \cdot (t^3)}
\end{aligned}
\Rightarrow \underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T} \cdot [v]_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{bmatrix} = \tilde{v}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \tilde{v}_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \tilde{v}_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Theoretisch:

$$[\underline{v}]_B = \underbrace{\left[[\tilde{b}^{(1)}]_B \; [\tilde{b}^{(2)}]_B \; \dots \; [\tilde{b}^{(n)}]_B \right]}_{T} \cdot [\underline{v}]_{\tilde{B}}$$

Betrachten $F : V \to V$ linear.

- $[F]_B$ Darstellungsmatrix bzgl. B
- $[F]_{\tilde{B}}$ " " $\tilde{B}$
- $\underline{T}$ Übergangsmatrix von $\tilde{B}$ nach B
- $\underline{S}$ " " B nach $\tilde{B}$

$$\Rightarrow [F]_{\tilde{B}} = T^{-1} [F]_B T$$

$$[F]_B = S^{-1} [F]_{\tilde{B}} S$$

Kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{B}: & \tilde{x} \arrow[r, "{[F]_{\tilde{B}}}"] \arrow[d, "T"'] & \tilde{y} \\
B: & x \arrow[r, "{[F]_B}"'] & y \arrow[u, "S = T^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

$$[F]_{\tilde{B}} = S [F]_B T$$

"Alte Basis zur neuen": $\boxed{B \cdot T = \tilde{B}}$

"neue Basis" · "Basiswechsel alt → neu" = "alte Basis"

"Neue Basis zur alten": $\tilde{B} \cdot S = B$

$$\tilde{B} = B \cdot T = \begin{bmatrix} | & | & | \\ b^{(1)} & b^{(2)} & b^{(3)} \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{t_{11} \left[b^{(1)} \right] + t_{21} \left[b^{(2)} \right] + t_{31} \left[b^{(3)} \right]}_{\tilde{b}^{(1)}} + t_{12} \left[b^{(1)} \right] + \dots$$

Lineare Abbildungen:

Def.: V, W zwei VR, eine Abbildung:

$$\mathcal{F} : V \to W, \ x \mapsto \mathcal{F}(x)$$

heisst linear, falls:

(i) $\mathcal{F}(x+y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$ $\quad x, y \in V$

(ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot x) = \alpha \mathcal{F}(x)$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}, x \in V$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}(\alpha x + y) = \alpha \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$

Bsp: $\mathcal{F} : V \to W, \ \underline{x} \mapsto \underline{A}\,\underline{x}$

$$\mathcal{F}(\alpha x + y) = \underline{A}(\alpha \underline{x} + \underline{y}) = \alpha \underline{A}\,\underline{x} + \underline{A}\,\underline{y} \quad \square$$

Bsp.: $\mathcal{F} : V \to W, \ \underline{x} \to 0$

$$\mathcal{F}(\alpha x + y) = 0 = \alpha 0 + 0 = \alpha \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y) \quad \square$$

Bsp: $\mathcal{F} : V \to W, \ x \to x + a, \ a \neq 0$

$$f(\alpha x + y) = (\alpha x + y) + a \neq$$

$$\alpha f(x) + f y = \alpha(x+a) + y + a = \alpha x + \alpha a + y + a$$

$$\underline{\underline{T}} \cdot [\underline{v}]_{\tilde{B}} = [\underline{v}]_B$$

$$[\underline{v}]_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v} = \tilde{v}_1 \underline{\tilde{b}}^{(1)} + \tilde{v}_2 \underline{\tilde{b}}^{(2)} + \dots$$

$$\underline{\underline{T}} \cdot [\underline{v}]_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{bmatrix} = \tilde{v}_1 \begin{bmatrix} | \\ t_1 \\ | \end{bmatrix} + \tilde{v}_2 \begin{bmatrix} | \\ t_2 \\ | \end{bmatrix} + \tilde{v}_3 \begin{bmatrix} | \\ t_3 \\ | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Übungsstunde 6:

Themen:

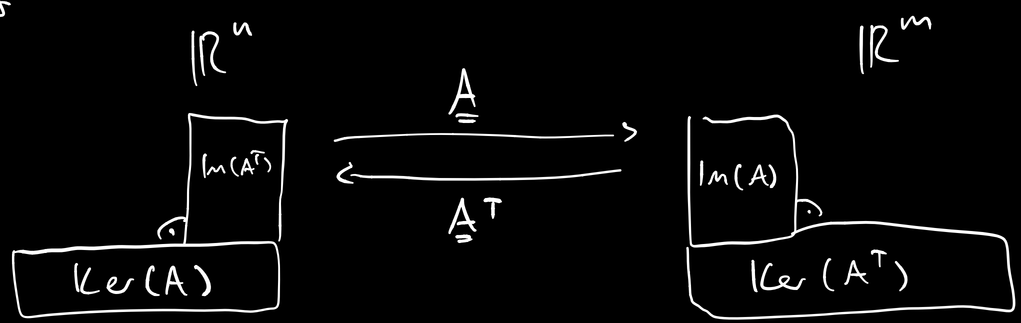
- Nachbesprechung Theorie 5 / Serie 4
- Koordinaten in einer bestimmten Basis
- Koordinatentransformation & Basiswechsel
- Lineare Abbildungen

Korrektur Theorie 5:

Eigenschaften zum Kern & Bild linearer Abbildungen:

(vi) war falsch $\rightarrow$ streicht das in euren Notizen

Richtig:



(v) $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) = n$

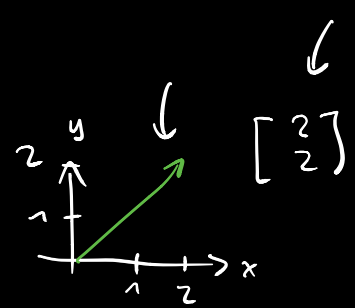
Was zusätzlich gilt, siehe Zeichnung: $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$

$\Rightarrow$ (vi) $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(A^T))$!

Feedback Serie 4:

- HM wurde gut gelöst
- GR: Koeff.vgl. ausprobieren

  $\hookrightarrow \quad Q_{21} = G \quad \Rightarrow \quad Q = G^T = Q_{21}^T$



Koordinaten in einer bestimmten Basis:

$B = \{ \underline{b}^{(1)}, \underline{b}^{(2)}, \underline{b}^{(3)}, \dots, \underline{b}^{(n)} \}$ eine Basis:

$$\underline{x} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ b^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ b^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} | \\ b^{(n)} \\ | \end{bmatrix}$$

Koordinaten von $\underline{x}$

Bsp. 6.1: $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$, $B = [\underline{b}_1 \; \underline{b}_2] = \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right]$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_1 \quad b_2$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -10 \end{bmatrix} , \quad \underline{v} = v_1 \cdot \underline{b}_1 + v_2 \cdot \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} | & | \\ \underline{b}_1 & \underline{b}_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A}} \, \underline{x}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & -10 \end{array} \xrightarrow{II - \frac{1}{2} I} \begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 3.5 & -11 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} v_2 = -\dfrac{22}{7} \\ v_1 = \dfrac{40}{7} \end{array} \Rightarrow [\underline{v}]_B = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 40 \\ -22 \end{bmatrix}$$

Bsp: $U \subseteq \mathbb{R}^4$ ein UVR : $U = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \}$ $\qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc} \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_3 = s \\ x_4 = u \\ x_2 = 2s - u \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} t \\ 2s-u \\ s \\ u \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \; t, s, u \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Frage: P_2 , $B = \{ b^{(1)} = 1, \; b^{(2)} = x - 2 , \; b^{(3)} = x^2 \}$ $\quad (1, x, x^2)$

$$p(x) = 7x^2 - 4x + 4 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b^{(1)} \\ b^{(2)} \\ b^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{bmatrix}$$

$$= a_1 (1) + a_2 (x - 2) + a_3 (x^2) \qquad \begin{bmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= -4 (1) - 4 (x - 2) + 7 (x^2) = 7x^2 - 4x + 8 - 4$$

$$= 7x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow [p(x)]_B = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad e^{i\omega t}$$

Koordinatentransformation & Basiswechsel:

Ausgangslage:

$$[\underline{v}]_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \vdots \\ \tilde{v}_n \end{bmatrix} \xrightarrow[\underline{\underline{T}}]{\text{wollen}} [\underline{v}]_B = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{v} = \tilde{v}_1 \begin{bmatrix} | \\ \tilde{b}^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + \tilde{v}_2 \cdot \begin{bmatrix} | \\ \tilde{b}^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + \dots + \tilde{v}_n \begin{bmatrix} | \\ \tilde{b}^{(n)} \\ | \end{bmatrix}$$

$$= v_1 \begin{bmatrix} | \\ b^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + v_2 \cdot \begin{bmatrix} | \\ b^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + \dots + v_n \begin{bmatrix} | \\ b^{(n)} \\ | \end{bmatrix}$$

$$= \tilde{v}_1 \underbrace{\left(a_1 \begin{bmatrix} | \\ b^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} | \\ b^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + \dots + a_n \begin{bmatrix} | \\ b^{(n)} \\ | \end{bmatrix} \right)}_{\tilde{b}^{(1)}} + \tilde{v}_2 \underbrace{\left(c_1 \begin{bmatrix} | \\ b^{(1)} \\ | \end{bmatrix} + c_2 \cdot \begin{bmatrix} | \\ b^{(2)} \\ | \end{bmatrix} + \dots \right.}_{\tilde{b}^{(2)}}$$

Koordinatendarstellung von $[\tilde{b}^{(1)}]_B$

$$\underline{\underline{T}} \, [v]_{\tilde{B}} = [v]_B$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} a_1 & c_1 & \\ a_2 & c_2 & \\ a_3 & c_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \\ a_n & c_n & \end{bmatrix}$$

Bsp: Sei V ein VR mit $\tilde{B} = \{3t, 2t^3+2, t+1\}$, $B = \{1, t, t^3\}$

$\tilde{b}^{(1)} = 3t = 0 \cdot 1 + 3 \cdot t + 0 \cdot t^3$

$\tilde{b}^{(2)} = 2t^3+2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot t + 2 \cdot t^3$

$\tilde{b}^{(3)} = t+1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}} \cdot [\underline{v}]_{\tilde{B}} = [\underline{v}]_B \qquad T^{-1} = S$$

Formeln:

"Alte Basis zur neuen Basis": $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\tilde{B}}}$ $\qquad \underline{\underline{T}} \cdot [\underline{v}]_{\tilde{B}} = [\underline{v}]_B$

"Neue Basis" - "BWM neu zu alt" = "alte Basis"

"Neue Basis zur alten Basis": $\underline{\underline{\tilde{B}}} \cdot \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{B}}$ $\qquad \underline{\underline{S}} \cdot [\underline{v}]_B = [\underline{v}]_{\tilde{B}}$

$$\underline{\underline{\tilde{B}}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \underline{b}^{(1)} & \underline{b}^{(2)} & \underline{b}^{(3)} \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \Big[\underbrace{\big[t_{11} \underline{b}^{(1)} + t_{21} \underline{b}^{(2)} + t_{31} \underline{b}^{(3)} \big]}_{\tilde{\underline{b}}^{(1)}} \quad t_{12} \underline{b}^{(1)} \dots$$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\tilde{B}}} \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} \quad B \mid \tilde{B} \rightarrow I \mid T$$

$$\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}$$

Abbildungen unter BWM:

$F: V \to V$ linear

- $[F]_{\tilde{B}} = \tilde{A}$ Darstellungsmatrix von F in der Basis $\tilde{B}$
- $[F]_B = A$ " " " B
- T Übergangsmatrix von $\tilde{B} \to B$
- $S = T^{-1}$ " " $B \to \tilde{B}$

$$\begin{tikzcd} \tilde{\underline{x}} & & \tilde{\underline{y}} \\ \tilde{B} \arrow[rr, "{[F]_{\tilde{B}} = \tilde{A}}"] \arrow[d, "\underline{\underline{T}}"] & & \tilde{B} \\ B \arrow[rr, "{[F]_B = A}"'] & & B \arrow[u, "\underline{\underline{S}}"'] \\ \underline{x} & & \underline{y} \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow [F]_{\tilde{B}} = SAT = T^{-1}AT$$

$$[F]_{\tilde{B}}\, \underline{v} = SAT\, \underline{v}$$

Lineare Abbildungen:

V, W zwei VR, $F: V \to W$, $x \mapsto F(x)$

F heisst linear, falls:

(i) $\forall x, y \in V$: $F(x+y) = F(x) + F(y)$

(ii) $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$: $F(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot F(x)$

$\rightsquigarrow$ überprüft: $F(\alpha x + y) = \alpha F(x) + F(y)$

Bsp: $F: V \to W$, $\underline{x} \mapsto \underline{\underline{A}}\, \underline{x}$

$$F(\alpha \underline{x} + \underline{y}) = \underline{\underline{A}}(\alpha \underline{x} + \underline{y}) = \alpha \underline{\underline{A}}\, \underline{x} + \underline{\underline{A}}\, \underline{y} = \alpha F(\underline{x}) + F(\underline{y})$$

Bsp: $F: V \to W$, $x \mapsto 0$

$$F(\alpha \underline{x} + \underline{y}) = 0 = \alpha \cdot 0 + 0 = \alpha F(\underline{x}) + F(\underline{y})$$

Bsp: $F: V \to W$, $x \mapsto x + \gamma$, $\gamma \neq 0$

$$F(\alpha x + y) = (\alpha x + y) + \gamma \neq$$

$$\alpha F(x) + F(y) = \alpha(x+\gamma) + (y+\gamma) = \alpha x + \alpha\gamma + y + \gamma$$

Bsp: $\mathcal{F}: V \to W, \quad x \mapsto \frac{d}{dt} x$

$$\mathcal{F}(\alpha x + y) = \frac{d}{dt}(\alpha x + y) = \alpha \frac{d}{dt} x + \frac{d}{dt} y = \alpha \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$$